

Τρίτο διαγώνισμα στις Διαφορικές Εξισώσεις

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 90 ΛΕΠΤΑ

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Θέμα 1

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(E) \quad (2x^2 + 2y^2 + x)dx + (x^2 + y^2 + y)dy = 0.$$

- (i) Αν είναι γνωστό ότι η εξίσωση έχει έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\phi(x^2 + y^2)$, με $\phi \in C^1(0, +\infty)$, να αποδειχθεί ότι η ϕ ικανοποιεί μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, και στη συνέχεια να προσδιοριστεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της εξίσωσης (E).
- (ii) Με χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα που βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα να λύσετε τη διαφορική εξίσωση (E).
- (iii) Υπάρχει λύση y_0 της (E) για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_0(x) = 2021$;

Θέμα 2

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(E) \quad (6xy + 2y^2)dx + (6xy + 2x^2)dy = 0.$$

- (i) Να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της εξίσωσης (E) της μορφής $p(x, y) = (x + y)^\lambda$, όπου λ κατάλληλος πραγματικός αριθμός. Στη συνέχεια, με χρήση αυτού του ολοκληρωτικού παράγοντα ή με άλλο τρόπο να λύσετε την εν λόγω διαφορική εξίσωση.
- (ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει μοναδική λύση y_0 της εξίσωσης (E) τέτοια, ώστε $y_0(0) = 0$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ